

# Meningkatkan pembelajaran bermakna matematika melalui proses abstraksi, formulasi, dan validasi dalam desain didaktis matematis

Nur Fitriani<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Magister Pendidikan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Yogyakarta, Yogyakarta, Indonesia

<sup>2</sup>SMA Islam Bunga Bangsa, Samarinda, Indonesia

\*Korespondensi: [nur.fitriani@yayasanbungabangsa.org](mailto:nur.fitriani@yayasanbungabangsa.org)

© Fitriani, 2025

## Abstract

Mathematics learning is designed by analyzing the overall character of all components involved. One of the analyses carried out is Pedagogical Didactic Analysis (PDA). PDA is carried out so that teachers can design mathematics learning that can make students actively involved in the process of abstraction, formulation, and validation. This third process is very important for students to experience so that students can find their own mathematical concepts in a complete and meaningful way. This study aims to provide concrete examples of how the process of abstraction, formulation, and validation occurs. This study is a qualitative design research. The results of this study indicate that the analysis carried out in designing a mathematical didactic design can cover all student responses. This is what makes the learning that takes place can run as expected, namely meaningful mathematics learning.

**Keywords:** Didactical design research, Abstraction, Formulation, Validation

## Abstrak

Pembelajaran matematika dirancang dengan melakukan analisis terhadap keseluruhan karakter dari semua komponen yang terlibat. Analisis yang dilakukan salah satunya adalah Analisis Didaktis Pedagogis (ADP). ADP dilakukan agar guru dapat merancang pembelajaran matematika yang dapat membuat siswa terlibat aktif pada proses abstraksi, formulasi, dan validasi. Ketiga proses ini sangat penting dialami oleh siswa agar siswa dapat menemukan sendiri konsep matematika secara utuh dan bermakna. Penelitian ini bertujuan untuk memberikan contoh konkret tentang bagaimana proses abstraksi, formulasi, dan validasi terjadi. Penelitian ini termasuk penelitian desain yang bersifat kualitatif. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa analisis yang dilakukan dalam merancang suatu desain didaktis matematis dapat mengcover seluruh respon siswa. Hal ini membuat pembelajaran yang berlangsung dapat berjalan sebagaimana yang diharapkan yaitu *meaningful learning mathematics*.

**Kata kunci:** Desain didaktis matematis, Abstraksi, Formulasi, Validasi

**How to Cite:** Fitriani, N. (2025). Meningkatkan pembelajaran bermakna matematika melalui proses abstraksi, formulasi, dan validasi dalam desain didaktis matematis. *Primatika: Jurnal Pendidikan Matematika*, 14(1), 29–40. <https://doi.org/10.30872/primatika.v14i1.4731>

## PENDAHULUAN

Salah satu pembelajaran yang akan ditemui oleh siswa pada setiap jenjangnya adalah pembelajaran matematika. Pembelajaran matematika merupakan pembelajaran yang sangat memfasilitasi siswa untuk memiliki berbagai kemampuan, diantaranya bernalar kritis. Agar dapat memfasilitasi siswa dalam belajar, maka pembelajaran matematika harus dirancang dengan mempertimbangkan karakteristik dari berbagai aspek yang terlibat. Seperti yang dikatakan oleh Kansanen (2003) bahwa pada proses pembelajaran setidaknya akan melibatkan tiga komponen utama yaitu guru, siswa, dan konten. Semua komponen ini dipandang secara integral dalam suatu desain yang disebut segitiga didaktis. Hubungan yang terbentuk antara siswa dan guru disebut dengan hubungan pedagogis. Hubungan yang terbentuk antara siswa dan konten matematika disebut hubungan didaktis, dan hubungan yang terbentuk antara konten matematika dan guru adalah analisis didaktis pedagogis.

Dari penjelasan tersebut terlihat bahwa, guru harus merancang suatu desain pembelajaran dengan melakukan analisis yang kritis dan komprehensif. Analisis yang dilakukan mengarah pada tindakan apa yang akan diberikan oleh guru untuk membuka proses belajar dibenak siswa. Selain itu, guru juga harus menganalisis dugaan respon siswa terhadap tindakan yang diberikan oleh guru. Selanjutnya guru menyiapkan tindakan didaktis maupun pedagogis untuk menindaklanjuti respon siswa tersebut. semua tindakan yang diberikan harus dapat membuat siswa melakukan aktivitas fisik maupun aktivitas mental yang mengarah pada proses belajar yang bermakna (Skemp, 1987).

Banyak pihak yang mengharapkan proses pembelajaran matematika di sekolah dapat dilakukan secara bermakna. Kebermaknaan pembelajaran matematika dapat dirasakan jika siswa minimal mengalami rangkaian proses abstraksi, formulasi, dan validasi dari suatu materi matematika yang diajarkan (Blum dkk., 2016). Oleh karena itu, peneliti melakukan suatu penelitian tentang bagaimana cara merancang desain didaktis matematis yang membuat siswa terlibat aktif dalam proses abstraksi, formulasi, dan validasi pada suatu materi. Penelitian ini dilakukan pada salah satu SMP negeri di Samarinda. Pemilihan tempat penelitian didasarkan pada hasil observasi pra penelitian dan proses wawancara bersama beberapa guru matematika di sekolah tersebut. Hasil observasi dan wawancara menunjukkan bahwa nilai matematika siswa setiap tahun masih tergolong rendah dan pembelajaran matematika yang dilakukan masih konvensional. Pada penelitian ini, peneliti mengangkat materi aljabar dasar sebagai contoh dalam pembuatan desain didaktis matematis.

## METODE

Penelitian ini merupakan penelitian desain yang memuat tiga tahapan yaitu *plan* untuk merancang analisis didaktis pedagogis, *do* untuk melakukan analisis metapedadidaktik, dan *see* untuk melakukan analisis retrospektif (Suryadi, 2019). Ketiga tahapan tersebut dilakukan pada *pilot experiment* dan *teaching experiment* (Plomp & Nieveen, 2013). Penelitian ini dilaksanakan pada salah satu sekolah

menengah pertama negeri di Samarinda pada bulan September Tahun 2022. Pada *pilot experiment*, peneliti menggunakan kelas kecil dengan siswa berjumlah 6 sampai 9 orang. Hal ini bertujuan agar peneliti dapat mengamati secara detail proses abstraksi, formulasi, dan validasi yang dilakukan oleh siswa. Pada *teaching experiment*, peneliti menerapkan desain didaktis yang telah dimodifikasi dari hasil analisis retrospektif pada *pilot experiment*. Desain didaktis matematis modifikasi diterapkan pada kelas dengan skala normal yang berisi 30 siswa.

Penentuan subyek dilakukan dengan teknik *purposive sampling*. Karakteristik yang ditetapkan untuk penentuan subyek adalah siswa sudah pernah belajar tentang aljabar dasar khususnya yang berkaitan dengan pola, dan siswa-siswi memiliki tingkat kemampuan yang heterogen dengan komposisi yang seimbang. Teknik pengumpulan data yang digunakan adalah observasi, wawancara, dan *pretest/posttest*. Adapun instrumen yang digunakan adalah rancangan *hypothetical learning trajectory*, tugas-tugas instruksional, lembar observasi, lembar wawancara, dan soal *pretest/posttest*. Seluruh instrumen dalam penelitian ini telah divalidasi oleh empat orang ahli. Adapun validitas data pada penelitian ini yaitu dengan melakukan *Focus Group Discussion* untuk melakukan audit terhadap seluruh rangkaian proses penelitian.

Teknik analisis data yang digunakan yaitu analisis retrospektif. Hal-hal yang diamati secara kritis dalam penelitian ini adalah hasil wawancara guru sebagai gambaran keadalah proses pembelajaran matematika sebelumnya khususnya pada materi aljabar dasar, kemudian hasil wawancara siswa untuk menelusuri ketepatan *learning trajectory* yang dirancang. Data hasil observasi terhadap hasil pekerjaan siswa difokuskan pada alur berpikir, matematisasi yang digunakan, serta *learning obstacles* yang dialami siswa. Data dari hasil *pilot experiment* dan *teaching experiment* berfokus pada kemampuan siswa terlibat aktif dalam proses abstraksi, formulasi, dan validasi selama pembelajaran berlangsung. Kemudian data *pretest* dan *posttest* difokuskan pada *learning obstacles* yang terjadi serta peningkatan pemahaman siswa sebagai bentuk efektivitas desain didaktis matematis yang diterapkan.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

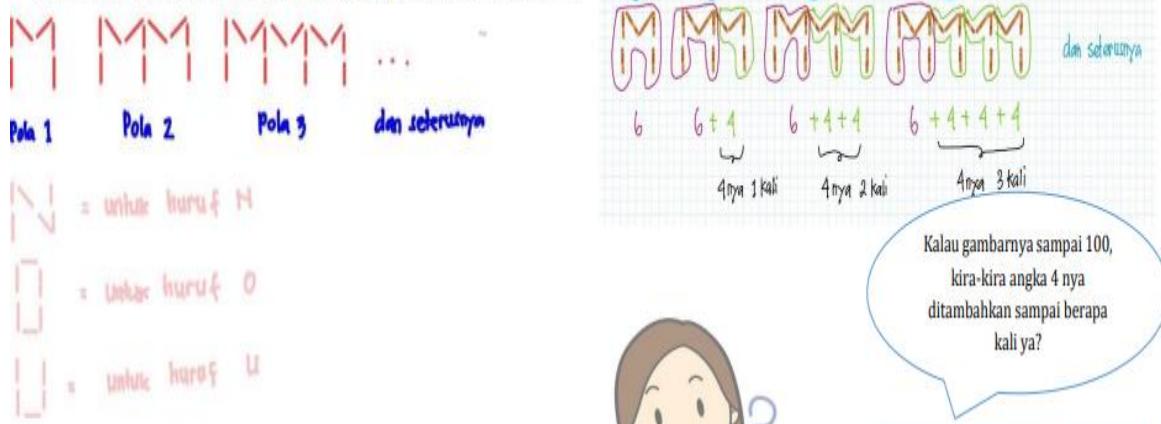
Penelitian ini bertujuan untuk memperlihatkan proses abstraksi, formulasi, dan validasi dalam proses pembelajaran matematika yang dirancang dalam suatu desain didaktis matematis. Materi yang dipilih sebagai contoh adalah materi aljabar dasar yang berkaitan dengan pola. Tujuan dari kegiatan ini adalah untuk membantu siswa mengenali, memprediksi, dan menggeneralisasi pola linier pada susunan benda/objek dan bilangan serta menyajikannya dalam berbagai macam representasi. Untuk tujuan tersebut, Peneliti merancang empat kegiatan yang akan dilakukan siswa pada beberapa pertemuan.

Kegiatan pertama adalah “Bekerja dengan Potongan Sedotan atau Batang Korek Api”. Pada kegiatan ini, guru akan mengkondisikan siswa menjadi beberapa kelompok kecil. Kemudian guru meminta masing-masing kelompok untuk menyusun batang korek api menjadi huruf M, H, N, U, atau O. Cuplikan tindakan didaktis guru dikemas

pada sebuah LKPD seperti pada Gambar 1.

Susunlah sedotan atau batang korek api yang telah dibagikan oleh guru, menjadi huruf M, Batang korek api yang kita miliki disusun menjadi seperti pola berikut.

huruf H, huruf N, huruf U, atau huruf O yang memiliki pola (1 kelompok 1 susunan huruf).



Gambar 1. Cuplikan tindakan didaktis 1 pada kegiatan I

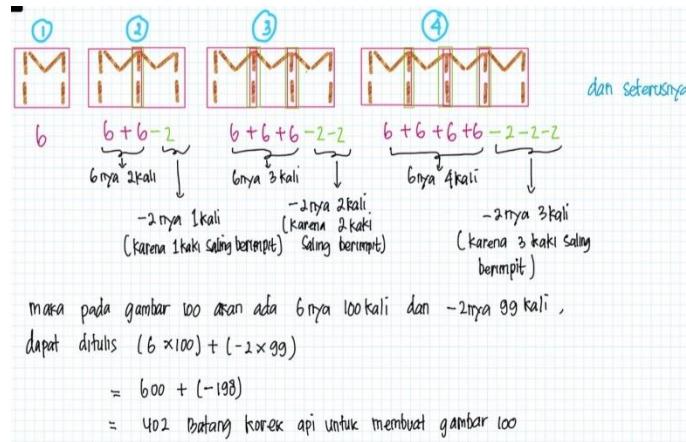
Kemudian, ada berbagai macam dugaan respon siswa terhadap tindakan didaktis yang diberikan. Beberapa respon tersebut terlihat pada Gambar 2, Gambar 4, dan Gambar 6. Pada saat penelitian, semua dugaan terhadap respon siswa terjadi, dengan tetap diberikan *guided* oleh guru agar siswa mampu berpikir mengarah pada tujuan yang diinginkan.



Gambar 2. Prediksi respon siswa untuk tindakan didaktis 1 pada kegiatan I



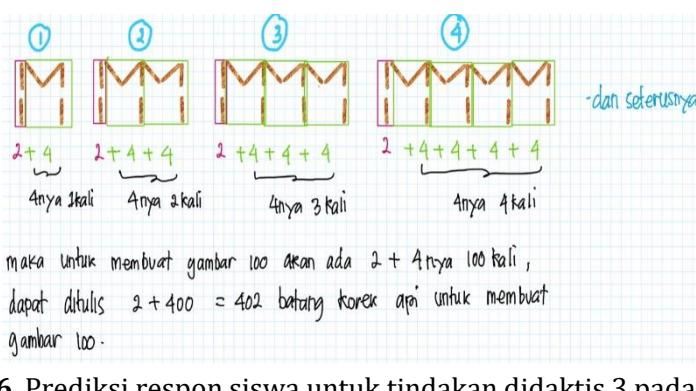
Gambar 3. Cuplikan tindakan didaktis 2 pada kegiatan I



Gambar 4. Prediksi respon siswa untuk tindakan didaktis 2 pada kegiatan I



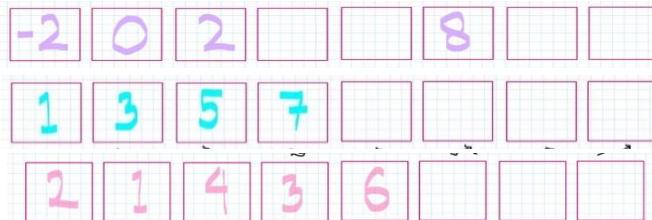
Gambar 5. Cuplikan tindakan didaktis 3 pada kegiatan I



Gambar 6. Prediksi respon siswa untuk tindakan didaktis 3 pada kegiatan I

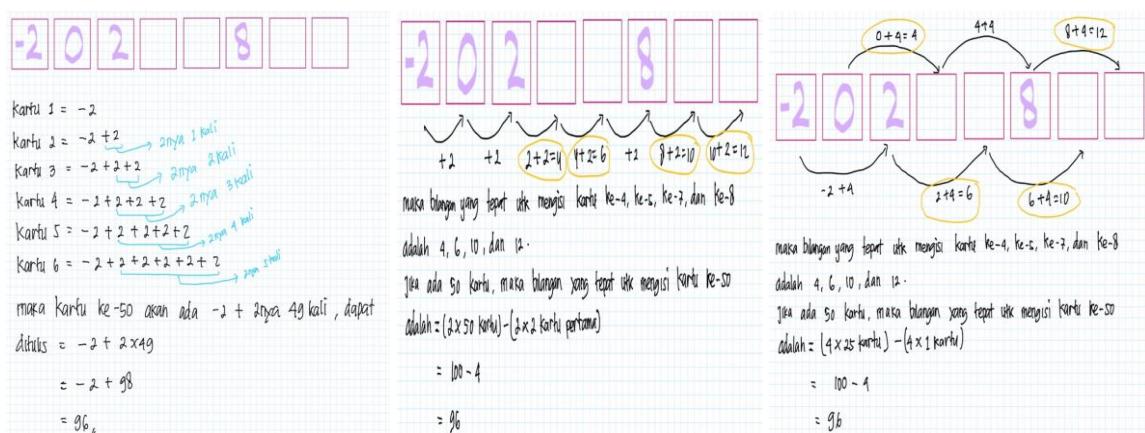
Dari Gambar 1 hingga Gambar 6, memberikan gambaran tentang proses abstraksi yang dilakukan oleh siswa. Proses abstraksi merupakan suatu proses untuk menciptakan pengalaman-pengalaman empiris siswa. Ketika ada pengalaman-pengalaman baru maka siswa akan melakukan klasifikasi dan melihat persamaan serta perbedaannya terhadap pengalaman sebelumnya (Skemp, 1978). Siswa akan mencoba menerapkan berbagai pengalaman sebelumnya untuk melakukan *problem solving*. Kegiatan pertama diberikan agar siswa mendapat pengalaman empiris tentang pola yang bersifat konkret. Kegiatan selanjutnya dirancang untuk memberikan pengalaman empiris tentang pola kepada siswa namun bersifat mulai abstrak, yaitu pengamatan pola pada bilangan.

Kegiatan kedua adalah “Bekerja dengan Kartu Bilangan”. Pada kegiatan ini Masing-masing kelompok siswa diminta untuk menyusun kartu bilangan tersebut (1 kelompok 1 susunan bilangan). Kartu bilangan terdiri dari tiga jenis, yaitu kartu bilangan genap, kartu bilangan ganjil, dan kartu bilangan campuran.

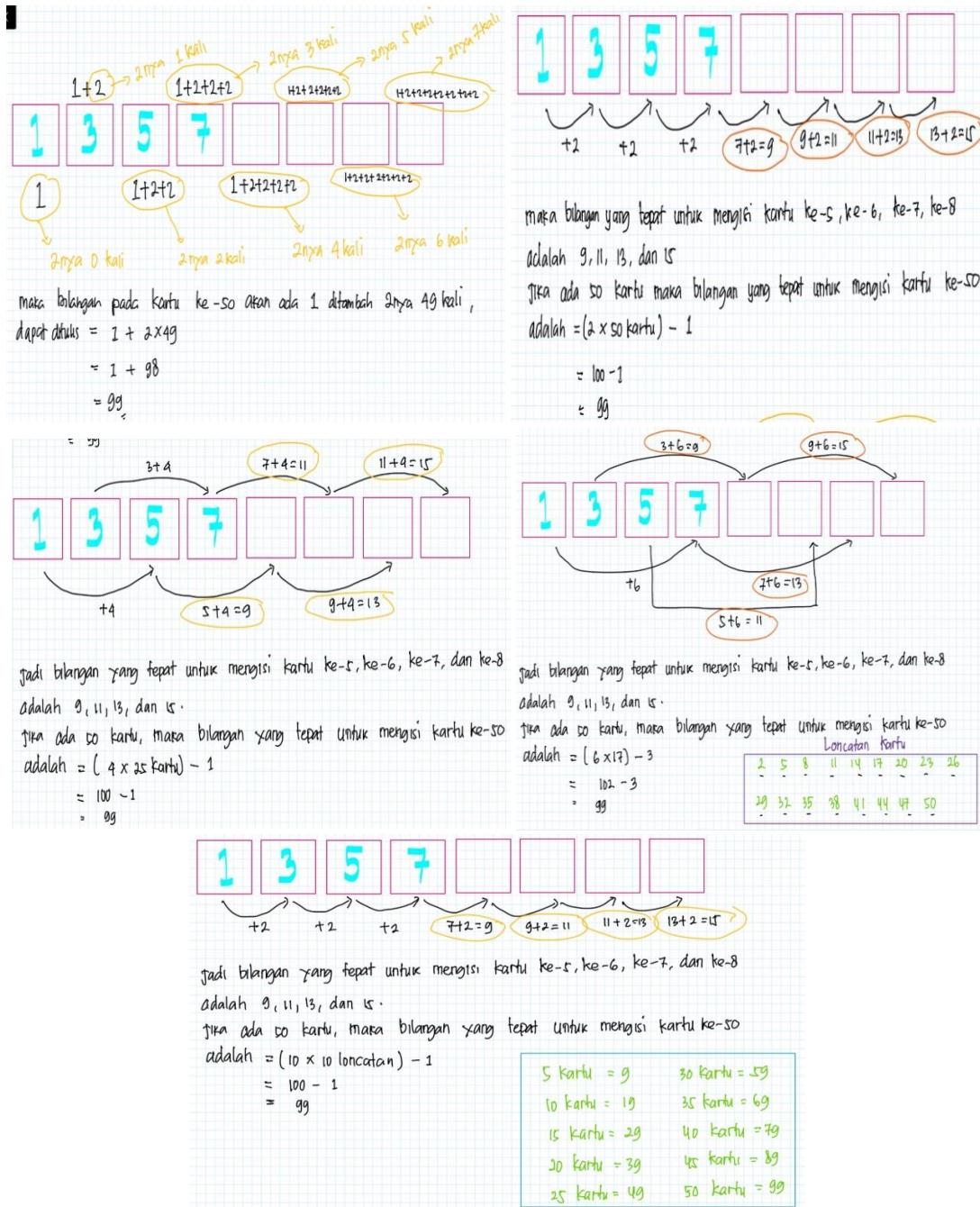


**Gambar 7.** Jenis-jenis kartu bilangan pada kegiatan II

Pada kegiatan kedua, siswa akan mendapat pengalaman yang memiliki persamaan dan perbedaan dengan pengalaman pada kegiatan pertama. Kegiatan kedua ini juga masih merupakan bagian dari proses abstraksi. Pengalaman ini hanya memberikan gambaran kepada siswa untuk mencoba melakukan problem solving. Namun belum pasti berhasil atau tidak. Pengalaman yang dimaksud adalah kegiatan bermatematika. Sehingga pada akhirnya siswa dapat membangun dugaan pemahaman terhadap suatu konsep matematika melalui pengalaman empirisnya. Karena masih bersifat dugaan, maka tidak berhenti sampai pada proses abstraksi saja. Setelah proses abstraksi, siswa harus terlibat pada proses formulasi. Proses formulasi pada pembahasan ini dapat terlihat pada Gambar 8, Gambar 9, dan Gambar 10.



**Gambar 8.** Prediksi respon siswa untuk kartu bilangan genap



Gambar 9. Prediksi respon siswa untuk kartu bilangan ganjil

Kegiatan dilanjutkan dengan tema "Pola Produksi Siswa". Kegiatan III ini merupakan kegiatan yang memfasilitasi proses formulasi. Proses formulasi merupakan suatu proses lanjutan dari proses abstraksi. Proses formulasi bertujuan untuk mengarahkan siswa menciptakan suatu formula dengan tahapan berpikir yang sistematis dan prosedural. Proses formulasi juga menjadi jembatan transisi dari matematika konkret ke matematika abstak. Dalam teori *Realistic Mathematics Education (RME)* hal ini disebut dengan matematisasi horizontal (Freudenthal, 2002). Pada Gambar 11 merupakan proses formulasi yang dilakukan oleh siswa.

Tindakan didaktis yang diberikan pada kegiatan III adalah Semua kelompok siswa diminta untuk membentuk batang korek api atau sedotan tersebut menjadi bentuk bangun segitiga-segitiga sama sisi yang bersambung dan berpola, dari 1 segitiga, 2 segitiga, 3 segitiga, dan seterusnya serta mengisi LKPD yang telah disediakan.

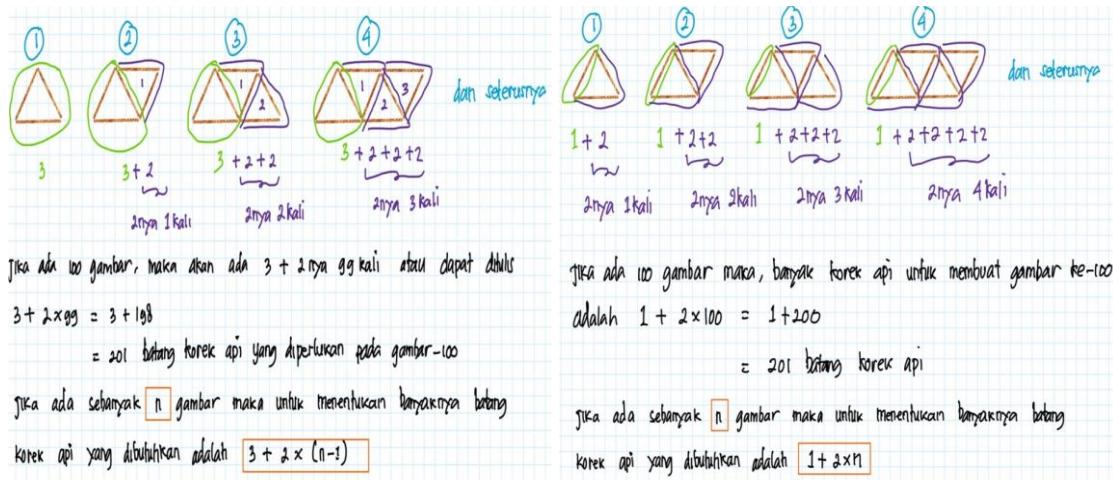


**Gambar 10.** Prediksi respon siswa untuk kartu bilangan campuran

Semua kelompok siswa diminta untuk berdiskusi untuk menuliskan generalisasi dari pola tersebut dalam ekspresi aljabar sehingga dapat menghasilkan berbagai formula dalam menentukan banyaknya batang korek api yang dibutuhkan untuk membuat pola ke-n. (Keterangan: Pada kegiatan ini guru sengaja memberi tugas yang sama pada semua kelompok, agar dapat melihat ragam ekspresi aljabar yang dihasilkan dari generalisasi pola yang sama atau disebut dengan “emergence models”).

Pada Gambar 11 terlihat bahwa siswa mencoba menciptakan formula yang dianggap dapat menjadi solusi dari *problem* yang disajikan. Formula yang terbentuk juga dianggap sesuai dengan pengetahuan yang didapat dari hasil proses abstraksi pada kegiatan-kegiatan sebelumnya. Setelah proses formulasi berhasil dilalui siswa dengan baik, maka akan dilanjutkan dengan kegiatan berikutnya.





Jika ada 100 gambar, maka akan ada  $3 + 2 \times 99$  kali atau dapat ditulis  
 $3 + 2 \times 99 = 3 + 198$   
 $= 201$  batang korek api yang diperlukan pada gambar-100

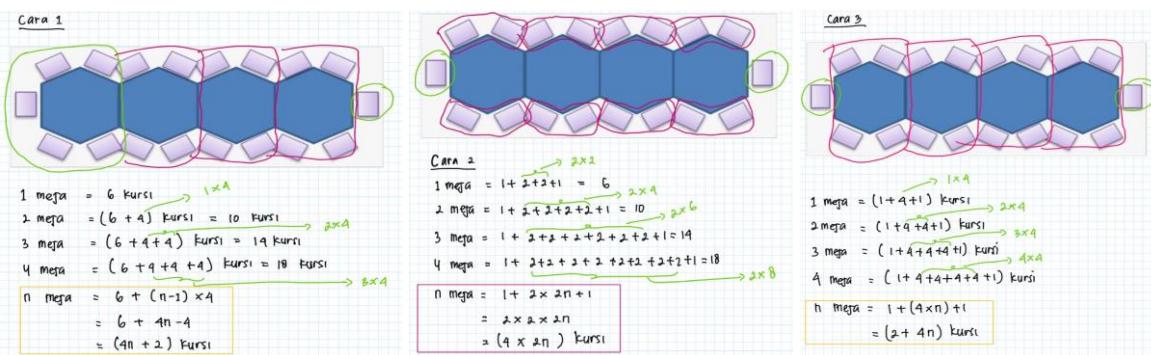
Jika ada sebanyak  $n$  gambar maka untuk menentukan banyaknya batang korek api yang dibutuhkan adalah  $3 + 2 \times (n-1)$

Jika ada 100 gambar maka, batang korek api untuk membuat gambar ke-100 adalah  $1 + 2 \times 100 = 1+200$   
 $= 201$  batang korek api

Jika ada sebanyak  $n$  gambar maka untuk menentukan banyaknya batang korek api yang dibutuhkan adalah  $1+2 \times n$

**Gambar 11.** Prediksi respon siswa untuk tindakan untuk kartu bilangan campuran

Kegiatan IV adalah "*Contextual Problem*". Kegiatan ini dirancang untuk memfasilitasi terjadinya proses validasi. Proses validasi merupakan proses untuk menguji kebenaran pengetahuan yang diperoleh dari rangkaian proses sebelumnya. Proses validasi dari kegiatan ini dapat dilihat pada Gambar 12. Tindakan didaktis yang diberikan adalah siswa diberi suatu tugas instruksional yaitu "terdapat 6 buah kursi yang diletakkan disekeliling meja yang berbentuk heksagonal. Selidiki berapa banyak kursi yang dapat ditempatkan jika beberapa meja heksagonal itu ditempatkan secara berdampingan dan ada sisi yang berimpit (Gürbüz & Ozdemir, 2020).



**Gambar 12.** Prediksi respon siswa untuk tindakan untuk kartu bilangan campuran

Pada Gambar 12, siswa telah berhasil memvalidasi pengetahuan yang diperolehnya dengan cara menerapkan pada suatu *contextual problem* yang disajikan. Proses ini merupakan lanjutan dari matematisasi horizontal yang terjadi pada proses formulasi sebelumnya. Hal ini disebut dengan matematisasi vertikal, yaitu kegiatan bermatematika yang dilakukan siswa untuk merepresentasikan suatu masalah kontekstual ke dalam bentuk matematika dengan penyelesaian yang beragam. Pada proses ini, melalui alur berpikir yang sistematis, secara tidak langsung siswa dilatih untuk memahami dan menerapkan berbagai aturan dalam matematika (Freudenthal, 2002).

Ketiga proses tersebut dapat terjadi jika guru mampu memberikan tugas-tugas instruksional yang tepat (Van de Walle, 2007). Melalui tugas instruksional yang diberikan mampu membuat siswa melakukan aktivitas fisik dan aktivitas mental pada proses belajarnya (Shao, 2018). Tugas instruksional ini juga dapat membuat guru memahami alur berpikir siswa bahkan sangat memungkinkan guru mendapatkan pengetahuan baru melalui respon siswa (Godino dkk., 2018). Dari seluruh rangkaian kegiatan yang telah dirancang dan diterapkan, guru dapat melihat di bagian mana siswa perlu *guided* untuk tetap pada pola pikir yang benar dan sesuai. Serta, guru dapat melihat tindakan pedagogis yang dianggap perlu dan mampu melengkapi tindakan didaktis yang diberikan. Setelah siswa berperan aktif dalam proses abstraksi, formulasi, dan validasi pada suatu proses pembelajaran matematika, siswa tidak hanya akan mendapatkan pengetahuan yang utuh, pemahaman konseptual dan prosedural yang tepat (Gotze, 2019), namun juga dapat menyimpan informasi tersebut dalam waktu yang lama pada *long term memory*nya.

## KESIMPULAN

Menciptakan pembelajaran matematika yang bermakna dapat dilakukan dengan melakukan analisis kritis dan komprehensif terhadap karakteristik dari semua komponen yang terlibat dalam segitiga didaktis. Salah satunya guru harus melakukan analisis didaktis pedagogis agar dapat memfasilitasi terjadinya proses berpikir di benak siswa. Proses berpikir siswa yang efektif dalam pembelajaran matematika setidaknya melalui tiga proses, yaitu proses abstraksi, formulasi, dan validasi.

Proses abstraksi adalah proses yang memberi kesempatan kepada siswa untuk terlibat pada pengalaman empiris yang menuju pada konsep matematika yang hendak dicapai. Proses formulasi adalah proses dimana siswa mengambil hal-hal fundamental dari pengalaman yang dialami pada proses abstraksi. Hal-hal fundamental ini berkaitan dengan prinsip dan prosedur dalam bermatematika. Guru tetap bertugas untuk memantau dan memberi *guided* pada tahap yang tepat. Selanjutnya proses validasi, yaitu proses untuk menguji kebenaran dari pengetahuan matematika yang telah dibangun oleh siswa. Pada proses ini biasanya kevalidan konsep matematika yang ditemukan, akan diterapkan pada *contextual problem* agar siswa memahami penerapan dari konsep tersebut.

## DAFTAR PUSTAKA

- Blum, W., Artigue, M., Maria., Mariotti, A., Sträßer, R., & Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2016). *European Traditions in Didactics of Mathematics*. ICME-13 Monographs. <http://www.springer.com/series/15585>
- Freudenthal, H. (2002). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. In Angewandte Chemie International Edition*. Kluwer Academic Publishers. <https://doi.org/10.1007/0-306-47235-X>
- Godino, J. D., Rivas, H., Burgos, M., & Wilhelmi, M. R. (2018). Analysis of Didactical Trajectories in Teaching and Learning Mathematics: Overcoming Extreme



- Objectivist and Constructivist Positions. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 14(1), 147–161. <https://doi.org/10.12973/iejme/3983>
- Götze, D. (2019). Language-Sensitive Support Of Multiplication Concepts Among at-Risk Children: A Qualitative Didactical Design Research Case Study. *Learning Disabilities: A Contemporary Journal*, 17(2), 165–182.
- Gürbüz, M. Ç., & Ozdemir, M. E. (2020). A Learning Trajectory Study on How the Concept of Variable Is Constructed by Students. *World Journal of Education*, 10(1), 134–148. <https://doi.org/10.5430/wje.v10n1p134>
- Kansanen, P. (2003). Studying--The realistic bridge between instruction and learning. An 121 attempt to a conceptual whole of the teaching-studying-learning process. *Educational Studies*, 29(2-3), 221–232. <https://doi.org/10.1080/03055690303279>
- Plomp, T., & Nieveen, N. (2013). Educational Design Research Educational Design Research. *Netherlands Institute for Curriculum Development: SLO*, 1–206. <http://www.eric.ed.gov/ERICWebPortal/recordDetail?accno=EJ815766>
- Shao, Z. (2018). *Task Design in Mathematics Classrooms*. In: Cao, Y., Leung, F. (eds) The 21st Century Mathematics Education in China. New Frontiers of Educational Research. Springer, Berlin, Heidelberg. [https://doi.org/10.1007/978-3-662-55781-5\\_11](https://doi.org/10.1007/978-3-662-55781-5_11)
- Skemp, R. R. (1987). *The Psychology-of-Learning-Mathematics*. Lawrence Erlbaum Associates Publisher.
- Suryadi, D. (2019). *Penelitian Desain Didaktis (DDR) dan Implementasinya*. Gapura Press.
- Van de walle, J. A. (2007). *Elementary and Middle School Mathematics*. Pearson Education, Inc.

