PMSGK (2022); 3: 58-63
pISSN: 2721-6292 eISSN: 2962-9705

PROCEEDINGS SEMINAR NASIONAL
PENDIDIKAN MATEMATIKA, SAINS,
GEOGRAFI, DAN KOMPUTER
Homepage: https://jurnal.fkip.unmul.ac.id/index.php/msgk/index

Analytic confirmation of ellipse surface area using Surveyor's Formula

Konfirmasi analitik luas daerah elips dengan *Surveyor's Formula*

Nurul Khasanatun Nisa'[1*], Haeruddin[1], J. R. Watulingas[1]
[1] Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Mulawarman

* Email Penulis Korespondensi: nurulkhanisa45@gmail.com

Article Information

Keywords:
Analytical confirmation
Area
Ellipse
Surveyor's formula

Abstract

This article demonstrate a alternative analitycal proof (analytical confirmation) for area of an ellipse with surveyor's formula. First step of this research process is listed all literatures (bibliography) as data source. These data give information about definition of surveyor's formula, derivation of surveyor's formula, and a alternative analytical proof for area of circle with surveyor's formula which collected as literature summary. Next step is learned the data to write the proof. The proof is orderly logical mathematics statement. It shows that area of an ellipse confirmed analytically by surveyor's formula.

Info Artikel

Kata kunci:
Konfirmasi analitik
Luas daerah
Elips
Surveyor's formula

Abstrak

Artikel ini mendemonstrasikan alternatif pembuktian secara analitik (konfirmasi analitik) luas daerah elips dengan *surveyor's formula*. Langkah awal dalam melakukan penelitian ini ialah menyusun bibliografi kerja sebagai sumber data kepustakaan. Data kepustakaan berupa informasi mengenai definisi *surveyor's formula*, derivasi *surveyor's formula*, dan alternatif pembuktian rumus luas daerah lingkaran secara analitik dengan *surveyor's formula* yang dikumpulkan dalam bentuk dokumentasi berupa rangkuman pustaka. Kemudian, data tersebut dipelajari untuk menyusun hasil penelitian. Hasil penelitian berupa kalimat matematika yang tertib dan logis. Hasil penelitian menunjukkan bahwa rumus luas daerah elips dapat dikonfirmasi dengan *surveyor's formula*.

PENDAHULUAN

Pada matematika, meyakinkan akan kebenaran suatu pernyataan (sifat-sifat dan teorema atau dalil) dengan serangkaian argumen logis disebut pembuktian matematika. Menurut Knuth et al. (2017) pembuktian matematika merupakan hal pokok dalam latihan matematika dan memerankan hal penting dalam belajar matematika. Pembuktian matematika menurut Hernadi (2008) juga bermanfaat untuk melatih *logical thinking* dalam belajar matematika.

Pembuktian dalam sejarah perkembangan matematika, meskipun suatu teorema atau dalil telah dibuktikan, akan ada alternatif pembuktian dengan metode maupun penyajian yang berbeda. Menurut Dawson (2006) alternatif pembuktian matematika memperluas skop penggunaan teorema matematika serta memperkenalkan pemahaman dan rute baru dalam pembuktian teorema matematika, sehingga dapat menambah bahan belajar pembuktian matematika. Selain itu, alternatif pembuktian matematika menurut Dawson (2006) berperan sebagai konfirmasi teorema atau dalil yang telah dibuktikan sebelumnya.

Contoh penelitian tentang alternatif pembuktian matematika terdapat pada jurnal *The College Mathematics Journal* dengan judul "*The Surveyor's Area Formula*" oleh Bart Braden (1986), yaitu alternatif pembuktian secara analitik (secara aljabar) rumus luas daerah lingkaran dengan *surveyor's formula*. Jika setiap koordinat titik sudut poligon sederhana didaftar berurutan, yaitu (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... , (x_n, y_n); $n \in \mathbb{N}$, maka luas poligon tersebut (L) adalah

$$L = \frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix} + \cdots + \det\begin{bmatrix} x_{n-1} & x_n \\ y_{n-1} & y_n \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} x_n & x_1 \\ y_n & y_1 \end{bmatrix}\right| \quad (1)$$

(Braden, 1986; Lee & Lim, 2017). Persamaan (1) adalah *surveyor's formula*. Menurut Braden (1986) derivasi *surveyor's formula* memperkenalkan dengan baik tentang interpretasi geometri determinan matriks berordo 2×2 berupa luas daerah jajaran genjang, sehingga perlu disampaikan pada pembelajaran kalkulus, yaitu vektor. Pada derivasi *surveyor's formula*, terlebih dahulu diperoleh formula untuk menentukan luas daerah segitiga, kemudian formula general untuk bangun segi-n diperoleh dengan mendekomposisi bangun segi-n menjadi $(n-2)$ segitiga dan mengaplikasikan *surveyor's formula* luas daerah segitiga yang diperoleh sebelumnya. Bagian "*some exercises*" pada jurnal ini, penulis mengundang pembaca untuk melakukan verifikasi terhadap luas daerah kurva yang diketahui persamaan parametrik kurva tersebut, salah satu kurva tersebut adalah elips. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui alternatif pembuktian secara analitik (konfirmasi analitik) daerah elips dengan *surveyor's formula*. Luas daerah elips dengan panjang masing-masing 2 sumbu simetri sama dengan 2α dan 2β adalah $L_{elips} = \pi\alpha\beta$.

METODE

Langkah awal dalam melakukan penelitian kepustakaan ini ialah menyusun bibliografi kerja sebagai sumber data kepustakaan. Data kepustakaan berupa informasi mengenai definisi *surveyor's formula*, derivasi *surveyor's formula*, dan alternatif pembuktian rumus luas daerah lingkaran secara analitik dengan *surveyor's formula* yang diperoleh dari jurnal oleh: (1) Bart Braden (1986) dengan judul *The Surveyor's Area Formula*; dan (2) Younhee Lee & Woong Lim (2017) dengan judul *Shoelace Formula: Connecting the Area of a Polygon and the Vector Cross Product*. Data kepustakaan dikumpulkan dalam bentuk dokumentasi berupa rangkuman pustaka. Kemudian, data tersebut dipelajari untuk menyusun hasil penelitian. Hasil penelitian berupa kalimat matematika yang tertib dan logis.

HASIL DAN DISKUSI

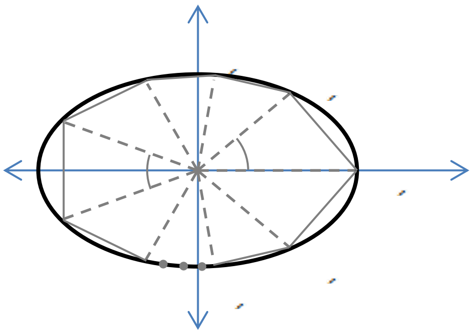
Berikut adalah alternatif pembuktian secara analitik rumus luas daerah elips dengan *surveyor's formula*:

Elips (misal elips E_1) yang berpusat di titik asal dengan panjang sumbu elips yang sejajar sumbu-x adalah 2α dan panjang sumbu elips yang sejajar sumbu-x adalah 2β didefinisikan oleh persamaan-persamaan

DOI: 10.30872/pmsgk.v3i0.1469
Penulis koresponden: luthfiahlintang@gmail.com

$x = \alpha \cos\theta$
$y = \beta \sin\theta$

untuk $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (Bolt, 1983). Koordinat $(x_k, y_k) = (\alpha\cos\theta_k, \beta\sin\theta_k)$ dengan



Gambar 1. Elips

$\theta_k = \frac{2(k-1)\pi}{n}$ untuk $0 < k \leq n; k, n \in \mathbb{N}$ merupakan koordinat titik sudut segi-n pada elips, dengan mengaplikasikan *surveyor's formula* luas daerah segi-n pada elips adalah

$$L = \frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix} + \cdots + \det\begin{bmatrix} x_{n-1} & x_n \\ y_{n-1} & y_n \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} x_n & x_1 \\ y_n & y_1 \end{bmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix} \alpha\cos 0 & \alpha\cos\frac{2\pi}{n} \\ \beta\sin 0 & \beta\sin\frac{2\pi}{n} \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} \alpha\cos\frac{2\pi}{n} & \alpha\cos\frac{4\pi}{n} \\ \beta\sin\frac{2\pi}{n} & \beta\sin\frac{4\pi}{n} \end{bmatrix} + \cdots + \det\begin{bmatrix} \alpha\cos\frac{2(n-1)\pi}{n} & \alpha\cos 0 \\ \beta\sin\frac{2(n-1)\pi}{n} & \beta\sin 0 \end{bmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\alpha\beta\left|\cos 0\sin\frac{2\pi}{n} - \sin 0\cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{2\pi}{n}\sin\frac{4\pi}{n} - \sin\frac{2\pi}{n}\cos\frac{4\pi}{n} + \cdots + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n}\sin 0 - \sin\frac{2(n-1)\pi}{n}\cos 0\right|$$

diperhatikan bahwa, $\cos A\sin B - \sin A\cos B = \sin(B - A)$ $\sin 0 = \cos 2\pi,$ dan $\cos 0 = \sin 2\pi$, maka

$$L = \frac{1}{2}\alpha\beta\left|\sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{2\pi}{n}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\alpha\beta\left|n\sin\frac{2\pi}{n}\right|$$

$$= \frac{n}{2}\alpha\beta\sin\frac{2\pi}{n} \because n \geq 3, \text{maka } 0 < \frac{2\pi}{n} \leq \frac{2\pi}{3} \text{ berakibat } 0 < \sin\frac{2\pi}{n} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

sehingga,

$$L_{elips} = \lim_{n\to\infty} L$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\alpha\beta\sin\frac{2\pi}{n}$$

$$= \pi\alpha\beta\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}$$

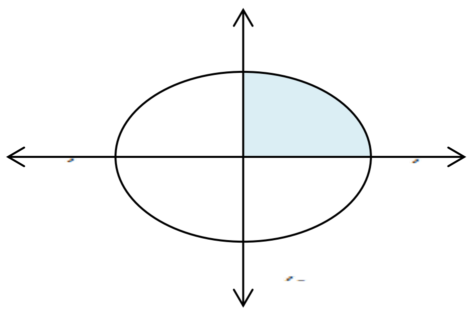
SEMNAS PMSGK
DOI: 10.30872/pmsgk.v3i0.1469
*Penulis koresponden: luthfiahlintang@gmail.com

$$= \pi\alpha\beta \lim_{\frac{1}{n} \to 0} \frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} = \pi\alpha\beta$$

Jadi, rumus luas daerah elips dapat dikonfirmasi dengan *surveyor's formula*.

Konfirmasi analitik rumus luas daerah elips sebelumnya telah dilakukan dengan integral. Berikut adalah alternatif pembuktian secara analitik rumus luas daerah elips dengan integral:

Persamaan elips (misal elips E_2) yang berpusat di titik asal dengan panjang sumbu elips yang sejajar sumbu-x sama dengan 2α dan panjang sumbu elips yang sejajar sumbu-x sama dengan 2β adalah



Gambar 2. Elips

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

Himpunan koordinat titik pada area A adalah

$$\mathbb{A} = \left\{ (x,y) \middle| 0 \le x \le \alpha, 0 \le y \le \beta\sqrt{1 - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2} \right\},$$

sehingga luas daerah A adalah

$$A = \beta \int_0^\alpha \sqrt{1 - \left(\frac{x}{y}\right)^2}\, dx$$

misal,

$$\frac{x}{\alpha} = \sin\theta \Rightarrow \frac{1}{\alpha} dx = \cos\theta\, d\theta;\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{x}{\alpha} = sin\theta \Leftrightarrow dx = \alpha\cos\theta\, d\theta$$

untuk, $x = 0 \Rightarrow 0 = \sin\theta$

$\Leftrightarrow \theta = 0$

untuk, $x = \alpha \Rightarrow 1 = \sin\theta$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow A = \beta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{y}\right)^2}\, (\alpha\cos\theta\, d\theta)$$

$$= \alpha\beta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta$$

DOI: 10.30872/pmsgk.v3i0.1469
Penulis koresponden: luthfiahlintang@gmail.com

$$= \frac{\alpha\beta}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2\theta + 1)\, d\theta$$

$$= \frac{\alpha\beta}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta + \theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi\alpha\beta}{4}$$

$$L_{elips} = 4 \cdot A = 4 \cdot \left(\frac{\pi\alpha\beta}{4}\right) = \pi\alpha\beta$$

Menurut Dawson (2006, 2010) pembuktian dikatakan lebih sederhana dan mudah dipahami dari pembuktian sebelumnya, jika pembuktian memerlukan lebih sedikit konsep prasyarat, sehingga pembuktian dapat dipahami oleh lebih banyak pembaca. Konsep prasyarat untuk memahami konfirmasi analitik rumus luas daerah elips dengan integral adalah persamaan elips dalam koordinat kartesius atau koordinat polar dan teknik pengintegralan yang telah disampaikan pada jenjang SMA/ sederajat. Konsep prasyarat untuk memahami konfirmasi analitik rumus luas daerah elips dengan *surveyor's formula* adalah sistem koordinat kartesius, persamaan parametrik elips, determinan matriks, identitas trigonometri, limit fungsi di tak hingga, dan *surveyor's formula*. Persamaan parametrik merupakan kosep yang mulai dipelajari pada perguruan tinggi.

Terlihat bahwa konfirmasi analitik pada bangun datar dengan *surveyor's formula* menggunakan konsep prasyarat lebih banyak dari konfirmasi analitik pada bangun datar dengan integral, sehingga konfirmasi tidak lebih sederhana dan cakupan pembaca yang memahami konfirmasi analitik pada bangun datar dengan *surveyor's formula* tidak lebih luas dari cakupan pembaca yang memahami konfirmasi analitik pada bangun datar dengan integral. Dilihat dari sisi lain, konfirmasi ini mengenalkan konsep baru dan mendemonstrasikan rute pembuktian yang berbeda, sehingga dapat menambah bahan belajar pembuktian matematika.

Surveyor's formula digunakan untuk menentukan atau membuktikan rumus luas daerah bangun datar saja, namun tidak menutup kemungkinan *surveyor's formula* dapat digunakan sebagai ide menyusun formula untuk menentukan atau membuktikan rumus volume bangun ruang. Diketahui bahwa *surveyor's formula* berangkat dari teorema bahwa jika $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ merupakan vektor di $\mathbb{R}^3$, maka

$$\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\| = \det\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix}$$

merupakan luas daerah jajaran genjang yang dibatasi oleh $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$. Adapun teorema lain, yaitu jika $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, dan $\boldsymbol{w}$ merupakan vektor di $\mathbb{R}^3$, maka

$$\|\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})\| = \det\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

merupakan volume dari paralelepipedum yang dibatasi oleh $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, dan $\boldsymbol{w}$. Berangkat dari teorema ini, pada artikel jurnal oleh Newson (1899-1900) menyebutkan bahwa enam kali volume tetrahedron dengan koordinat titik sudut (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), dan (x_4, y_4, z_4) dapat diekspresikan sebagai

$$6V = \det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_4 & y_4 & z_4 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_4 & y_4 & z_4 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}.$$

Hal ini dapat dijadikan referensi sehingga diperoleh formula umum untuk menentukan volume bangun ruang seperti halnya dengan *surveyor's formula*.

SEMNAS PMSGK
DOI: 10.30872/pmsgk.v3i0.1469
*Penulis koresponden: luthfiahlintang@gmail.com

KESIMPULAN

Rumus luas daerah elips dapat dikonfirmasi dengan *surveyor's formula*. Konfirmasi analitik luas daerah elips dengan *surveyor's formula* mengenalkan konsep baru dan mendemonstrasikan rute pembuktian yang berbeda, sehingga dapat menambah bahan belajar pembuktian matematika, namun proses konfirmasi ini tidak lebih sederhana dari alternatif pembuktian secara analitik rumus luas daerah elips dengan integral yang telah dilakukan sebelumnya.

REFERENSI

Anton, H. & Rorres, C. (2014). *Elementary Linear Algebra: Applicatoins Versions*. USA: Wiley

Bolt, B. (1983). The Parametric Equations of an Ellipse. *Teaching Mathematics and Its Applications: An International Journal of the IMA*, *2*(2), 53–54. https://doi.org/10.1093/teamat/2.2.53

Braden, B. (1986). The Surveyor's Area Formula. *The College Mathematics Journal*, *17*(4), 326–337. http://www.jstor.org/stable/2686282

Dawson, J. W. (2006). Why Do Mathematicians Re-prove Theorems? *Philosophia Mathematica (III)*, *14*(3), 269–286. https://doi.org/10.1093/philmat/nkl009

____________. (2010). *Why Prove it Again?: Alternative Proofs in Mathematical Practice*. New York: Birkhäuser. https://doi.org/10.1007/978-3-319-17368-9

Hernadi, J. (2008). Metoda Pembuktian dalam Matematika. *Jurnal Pendidikan Matematika*, *2*(1), 1–13.

Knuth, E., Zaslavsky, O., & Ellis, A. (2017). The Role and Use of Examples in Learning to Prove. *Journal of Mathematical Behavior*, 1–7. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.06.002

Lee, Y., & Lim, W. (2017). Shoelace Formula: Connecting the Area of a Polygon and the Vector Cross Product. *The Mathematics Teacher*, *110*(8), 631–636. http://www.jstor.org/stable/10.5951/mathteacher.110.8.0631

Sari, M., & Asmendri. (2020). Penelitian Kepustakaan (Library Research) dalam Penelitian Pendidikan IPA. *NATURAL SCIENCE : Jurnal Penelitian Bidang IPA Dan Pendidikan IPA*, *6*(1), 41–53.

Varberg D., dkk. (2007). *Kalkulus Edisi Kesembilan, Jilid I*. (I. N. Susila, terjemahan). Jakarta: Erlangga

DOI: 10.30872/pmsgk.v3i0.1469
Penulis koresponden: luthfiahlintang@gmail.com